Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. 1

Nombre total de fulls 5

Qualificació 6'4

1r. Cognom 2n. Cognom Nom DNI

Especialitat Curs: Grup:

Assignatura: Data: / /

1+0'2+0'9+1+0'4+0'9+0+2+0

Ex 1

8 asignatures

5 → han de matricularse

Quants alumnes?

1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3
4	4	4	4	4
5	5	5	5	5
6	6	6	6	6
7	7	7	7	7
8	8	8	8	8

Combinació sense repetició → no importa l'ordre, sinó quines assignatures tries.

$$C(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!\,m!}$$

$\boxed{n=8 \quad m=5}$

$$C(8,5) = \frac{8!}{(8-5)!\,5!} = \frac{8!}{3!\,5!} = 56 \text{ combinacions}$$

Solució → Per tant perquè hi hagin almenys 2 alumnes amb les mateixes assignatures, hauràn de matricularse 56+1 alumnes, en total 57 alumnes

! Ja que hi han 56 combinacions possibles sense repetició per tant si en fas una més, aquesta coincidiria exactament amb una altre de les 56 anteriors! i per tant 2 alumnes cursaran les ~~matei~~ mateixes assignatures!

1/1

Ex 2

$$\sum_{k=0}^{24} \binom{25}{k} 2^{k+1} = \cancel{(25+2)^k} \binom{25}{k} \cdot 2^k \cdot 2 =$$

" $(x+y)^k$

$$= \binom{25}{0} \cdot 2^0 \cdot 2 = 1 \cdot 2 = \boxed{2}$$

$$\boxed{\text{SOLUCION } \sum_{k=0}^{24} \binom{25}{k} 2^{k+1} = 2}$$

Aplicas mal la fórmula del Binomio de Newton!

0'2/1

Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm.	2
Nombre total de fulls	5
Qualificació	

1r. Cognom	2n. Cognom	Nom	DNI
ALEGRE	PEÑALVER	DAVID	47422468X

Especialitat: Curs: Grup:

Assignatura: Data: / /

SEGON PARCIAL

Ex 3

$$\binom{n+1}{n-1}=15 \longrightarrow \binom{6}{4}=15$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{n=5}$$

$$C(n,m)=\binom{n+m-1}{m} \quad ??$$

$$n \leftarrow \quad = \binom{\boxed{5}+2-1}{2} = \binom{6}{2} = \boxed{15}$$

Una altre opció seria $\binom{15}{14}$, pero no compleix l'enunciat $\rightarrow \binom{n+1}{n-1}=15$, per tant no es possible.

$\boxed{\text{i com a única solució tenim } n=5}$

Es correcta la solución, pero se podría mejorar

0'9/1

Ex 4

Permutació sense repetició.

$\underset{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6}}{\_}\ \underset{\substack{1\\2\\3\\4\\5\\6}}{\_}\ \underset{\substack{2\\4\\6}}{\_}$

$3\ \underset{\substack{1\\2\\4\\5\\6}}{\_}\ \underset{\substack{2\\4\\6}}{\_}$

$\underline{3}\ \underline{5}\ \underline{2}$

$$P(n,m) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$P(5,1) = \frac{5!}{(5-1)!} = \frac{5!}{4!} = 5$$

$$P(3,1) = \frac{3!}{2!} = 3$$

$5 \times 3 = 15 \rightarrow$ TOTAL DE PERMUTACIONS.

PERÒ SI APLIQUEM LA CONDICIÓ DE QUE NO ES PODEN REPETIR ELS DIGITS, ENS TROBEM QUE NO SÓN 15 JA QUE SINÓ INCLOURÍEM 322, 344 i 366 QUE NO PODEM, PER TANT.

AMB $\underline{3}$ _ _ $= 15 - 3 = 12$ PERMUTACIONS.

$4\ \underset{\substack{1\\2\\3\\5\\6}}{\_}\ \underset{\substack{2\\6}}{\_}$

$P(5,1) = 5$

$P(2,1) = 2$

$5 \times 2 = 10$ i ens passa igual (422, 466)
per tant $10 - 2 = 8$ PERMUTACIONS.

$5\ \underset{\substack{1\\2\\3\\4\\6}}{\_}\ \underset{\substack{2\\4\\6}}{\_}$ $\rightarrow$ EL MATEIX QUE EN EL CAS DEL 3 _ _, PER TANT 12 PERMUTACIONS.

$6\ \underset{\substack{1\\2\\3\\4\\5}}{\_}\ \underset{\substack{2\\4}}{\_}$ $\rightarrow$ EL MATEIX QUE EN EL CAS DEL 4 _ _, PER TANT 8 PERMUTACIONS.

$\boxed{\text{SOLUCIÓ}}$ PODRÀ FER UN TOTAL DE $12 \times 2 + 8 \times 2 = 40$ NÚMEROS PARELLS MAJORS DE 300.

1/1

Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. 3
Nombre total de fulls 5
Qualificació

1r. Cognom	2n. Cognom	Nom	DNI
ALEGRE	PEÑALVER	DAVID	47422468X

Especialitat: Curs: Grup:

Assignatura: Data: / /

SEGON PARCIAL

Ex 5

$$\underline{B}\ \underset{\substack{A\\2\\5}}{\_}\ \Big[\ \underset{\substack{A\\2\\5\\B}}{\_}\ \underset{\substack{A\\5\\2\\B}}{\_}\ \underset{\substack{2\\5\\A\\B}}{\_}\ \underset{\substack{A\\2\\5\\B}}{\_}\ \underset{\substack{A\\2\\5\\B}}{\_}\ \underset{\substack{A\\2\\5\\B}}{\_}\ \underset{\substack{A\\2\\5\\B}}{\_}\ \underset{\substack{A\\2\\5\\B}}{\_}\ \Big]$$

Permutació amb repetició limitada.

$$PRL(n,m) = \frac{(1+2+2+3)!}{1!\,2!\,2!\,3!} = \frac{8!}{2!\,2!\,3!} = 1.680 \rightarrow$$ SOLUCIONS AMB LA A en el segon lloc.

$$PRL = \frac{(1+3+1+3)!}{1!\,3!\,1!\,3!} = \frac{8!}{3!\,3!} = 1.120 \rightarrow$$ SOLUCIONS AMB EL 2 EN EL 2n LLOC.

$$PRL = \frac{(1+3+2+2)!}{1!\,3!\,2!\,2!} = \frac{8!}{1!\,3!\,2!\,2!} = 1.680 \rightarrow$$ SOLUCIONS AMB EL 5 EN EL SEGON LLOC.

EL TOTAL DE CONTRASENYES QUE ES PODEN FORMAR SON

$$2 \cdot 1.680 + 1.120 = \boxed{4.480 \text{ PERMUTACIONS}}$$

No correcto!

0'4/1

Ex 6

$a_0 = 1$

$a_1 = 10$

$a_n = 14 a_{n-1} - 49 a_{n-2}$, $n \geq 2$

Conjetura:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= C \cdot \alpha^n \\ a_{n-1} &= C \cdot \alpha^{n-1} \\ a_{n-2} &= \underset{\text{Cte.}}{C} \cdot \alpha^{n-2} \end{aligned}\right\} \rightarrow \cancel{C} \cdot \alpha^n = 14 \cdot \cancel{C} \cdot \alpha^{n-1} - 49 \cdot \cancel{C} \cdot \alpha^{n-2}$$

$$\alpha^n = 14\alpha^{n-1} - 49\alpha^{n-2}$$

$$\alpha^2 = 14\alpha - 49.$$

$$\alpha^2 - 14\alpha + 49 = 0.$$

$$\boxed{a_n = C_1 \cdot 7^n + C_2 \cdot 7^n} \leftarrow \boxed{\begin{aligned} \alpha_1 &= 7 \\ \alpha_2 &= 7 \end{aligned}}$$

$a_0 = 1 = C_1 + C_2 \rightarrow C_1 = 1 - C_2$

$a_1 = 10 = 7C_1 + 7C_2 \rightarrow 10 = 7(1 - C_2) + 7C_2$

$10 \neq 7 - \cancel{7C_2} + \cancel{7C_2}$

NO POT SER, PER TANT S'APLICA CAS CONCRET.

$$\rightarrow \boxed{a_n = C_1 \cdot 7^n + C_2 \cdot 7^n \cdot n}$$

$a_0 = 1 = C_1 \rightarrow \boxed{C_1 = 1}$

$a_1 = 10 = 7C_1 + 7C_2 \rightarrow 10 = 7 + C_2$

$\boxed{C_2 = 3}$

Despejas mal!

$$\boxed{a_n = 7^n + 3 \cdot 7^n \cdot n \quad \forall n \geq 0}$$

SOLUCIÓ.

0'9/1

Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. 4

Nombre total de fulls 5

Qualificació

1r. Cognom: ALEGRE | 2n. Cognom: PEÑALVER | Nom: DAVID | DNI: 47422468X

Especialitat: | Curs: | Grup:

Assignatura: | Data: / /

SEGON PARCIAL

Ex 7

$a_0 = -1$

$a_n = -2a_{n-1}, \ n \geq 1$

$a_n = -2a_{n-1} = -2(-2a_{n-2}) = \cancel{-2(-2(a_{n-3})}$

$= -2(-2(-2a_{n-3})) = -2(-2(-2(-2a_{n-4}))) =$

$\boxed{a_n = (-2)^4 a_{n-4}}$

d'aquí treurem una relació per trobar la solució de la recurrència.

$\boxed{a_n = (-2)^i \cdot a_{n-i}}$

$\cancel{a_n = (-2)^{n-1} \cdot a_{n-1}}$

Conjetura:

$a_n = C \cdot \alpha^n$

$a_{n-1} = C \cdot \alpha^{n-1}$

$a_{n-2} = C \cdot \alpha^{n-2}$

$\cancel{C} \cdot \alpha^n = (-2)^1 \cdot \cancel{C} \cdot \alpha^{n-1}$

$\alpha^2 = -2\alpha$

$\boxed{\alpha = -2}$

0/1

No aplicas el M. de sustitución!

$a_n = C_1 \cdot (-2)^n$

$a_0 = -1 = C_1 \cdot (-2)^0 = C_1$

$\boxed{C_1 = -1}$

$\boxed{a_n = (-1) \cdot (-2)^n} \ \forall n \geq 0.$

Ex 8

$a_0 = 1$

$a_1 = 3$

$a_n = -2a_{(n-1)} + 3a_{n-2} + 2^n, \ n \geq 2$

$f(n) = 2^n$

Conjetura de $a_n^{(H)}$:

$$\left.\begin{array}{l} a_n = c\cdot\alpha^n \\ a_{n-1} = c\cdot\alpha^{n-1} \\ a_{n-2} = c\cdot\alpha^{n-2} \end{array}\right\} \cancel{c}\cdot\alpha^n = -2\cancel{c}\cdot\alpha^{n-1} + 3\cancel{c}\cdot\alpha^{n-2}$$

$$\alpha^2 = -2\alpha + 3$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 3 = 0$$

$$a_n^{(H)} = C_1\cdot 1^n + C_2\cdot(-3)^n \leftarrow \boxed{\begin{array}{l}\alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = -3\end{array}}$$

$$\boxed{a_n^{(H)} = C_1 + C_2(-3)^n}$$

$a_n^{(P)} \rightarrow$ conjetura:

$$\left.\begin{array}{l} a_n^{(P)} = A\cdot 2^n \\ a_{n-1}^{(P)} = A\cdot 2^{(n-1)} \\ a_{n-2}^{(P)} = A\cdot 2^{(n-2)} \end{array}\right\} A\cdot\cancel{2^n} = -2A\cdot\cancel{2^{n-1}} + 3\cdot A\cdot\cancel{2^{n-2}} + \cancel{2^n}$$

$$A = -\cancel{2}A\cdot\frac{1}{\cancel{2}} + 3A\cdot\frac{1}{2^2} + 1$$

$$A = -A + \frac{3}{4}A + 1$$

$$2A = \frac{3}{4}A + 1$$

$$\frac{5}{4}A = 1 \rightarrow \boxed{A = \frac{4}{5}}$$

$$\rightarrow \boxed{a_n^{(P)} = \frac{4}{5}2^n}$$

$$\boxed{a_n = a_n^{(H)} + a_n^{(P)} = C_1 + C_2(-3)^n + \frac{4}{5}2^n}$$

$$a_0 = 1 = C_1 + C_2 + \frac{4}{5} \rightarrow \boxed{C_1 = 1 - C_2 - \frac{4}{5}} \rightarrow \boxed{C_1 = \frac{1}{2}}$$

$$a_1 = 3 = C_1 + (-3C_2) + \frac{8}{5} \rightarrow 3 = 1 - C_2 - \frac{4}{5} + -3C_2 + \frac{8}{5} \rightarrow$$

$$\rightarrow 3 - \frac{9}{5} = -4C_2 \rightarrow \boxed{C_2 = -\frac{3}{10}}$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{10}(-3)^n + \frac{4}{5}2^n} \rightarrow \text{SOLUCIÓN.}$$

Escola Politècnica Superior d'Enginyeria de Vilanova i la Geltrú

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Full núm. 5

Nombre total de fulls 5

Qualificació

1r. Cognom: ALEGRE

2n. Cognom: PEÑALVER

Nom: DAVID

DNI: 47422468X

Especialitat:

Curs:

Grup:

Assignatura:

Data: / /

SEGON PARCIAL

Ex 9.

$$\boxed{\begin{array}{l} a_3 = 3 \\ a_n = n \end{array}}$$

$a_{n+1} = n+1 \rightarrow a_{n+1} = a_n + 1$

$a_{n+2} = n+1+1 \rightarrow a_{n+2} = a_{n+1} + 1 = (a_n + 1) + 1$

$a_{n+3} = n+1+1+1 \rightarrow a_{n+3} = (a_n + 2) + 1$

$a_{n+4} = n+1+1+1 \rightarrow a_{n+4} = (a_n + 3) + 1$

$$\boxed{a_n = a_{n+4} - 4}$$

$$\boxed{a_n = a_{n+1} - 1}$$

$a_n = n$

$a_{n+1} = n+1$

$\rightarrow \cancel{a_3} \; n = (n+1) - 1$

$\boxed{a_3 = 3}$

$3 = (3+1) - 1$

$\boxed{3 = 3}$

No correcto!

0/1

SOLUCIÓ. $\boxed{a_n = a_{n+1} - 1 \quad \forall n \geq 0}$